|  |
| --- |
| Resultado de imagem para ufpeUniversidade federal de pernambuco (ufpe)  Centro de INformática - CIn |
| Solução de Equações Diferenciais Ordinárias |
| Métodos Numéricos Computacionais |
|  |
| **Marcos William Almeida Cavalcanti (MWAC)** |
| **9 de novembro de 2017** |

|  |
| --- |
|  |

*Sumário*

[*Introdução 3*](#_Toc404149167)

[*Implementação e Funcionamento 3*](#_Toc404149168)

[*Linguagem de Programação 3*](#_Toc404149169)

[*Valores de Entrada 3*](#_Toc404149170)

[*Valores de Saída 4*](#_Toc404149171)

[*Métodos Utilizados 4*](#_Toc404149172)

[*1. Euler 4*](#_Toc404149173)

[*2. Euler Inverso 6*](#_Toc404149174)

[*3. Euler Aprimorado 8*](#_Toc404149175)

[*4. Runge-Kutta de Grau 4 10*](#_Toc404149176)

[*5. Adams-Bashforth 13*](#_Toc404149177)

[*6. Adams-Moulton 18*](#_Toc404149178)

[*7. Fórmula Inversa da Diferenciação 18*](#_Toc404149179)

[*Limitações 18*](#_Toc404149180)

[*Questões 18*](#_Toc404149181)

[*Equipe 18*](#_Toc404149182)

[*Referências 18*](#_Toc404149183)

# Introdução

A proposta deste projeto é conseguir solucionar Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) a partir dos seguintes Métodos Numéricos (que serão detalhados posteriormente):

* Euler
* Euler Inverso
* Euler Aprimorado
* Runge-Kutta (Quarta ordem)
* Adams-Bashforth (Primeira a sexta ordem)
* Adams-Moulton (primeira a sexta ordem)

O programa faz parte do projeto da disciplina de Métodos Numéricos Computacionais para o curso de Graduação em Engenharia da Computação no Centro de Informática (CIn) da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE).

# Implementação e Funcionamento

## Linguagem de Programação

A linguagem utilizada foi Python. Essa linguagem oferece varias bibliotecas científicas que permitem trabalhar com equações, além de ser uma linguagem de alto nível orientada a objeto.

Biblioteca externa utilizada:

* Math

Biblioteca utilizada basicamente para pegar valores de senos, cossenos e funções trigonométricas, usado apenas na entrada da função.

* Matplotlib.pyplot

Biblioteca utilizada basicamente para plotar os gráficos.

## Valores de Entrada

1. *f(x,y)* : a função que deverá ser resolvida.. Dado tipo String
2. *x0:* é o valor inicial de x. Dado tipo float.
3. *y0:* é o valor inicial de y, ou seja y(x0). Dado tipo float.
4. *h:* é o tamanho do passo que será utilizado. Dado tipo float.
5. *n:* é o número de iterações que deverão ser realizadas. Dado tipo inteiro.
6. *ordem: define a ordem utilizada para os métodos de Adams*

*Observação: valores do tipo float devem usar ponto (.) e não vírgula (,).*

## Valores de Saída

A saída do programa será escrita em várias listas, correspondentes a cada método. Porém dado a quantidade de valores, escolhi apresentar apenas o valor final. E seu respectivo gráfico.

# Métodos Utilizados

O desenvolvimento e utilização dos métodos aqui descritos são desenvolvidos para problemas com equações de primeira ordem e valor inicial que consistem numa Equação Diferencial do tipo:

com condição inicial *y(x0) = y0*.

## 1. Euler

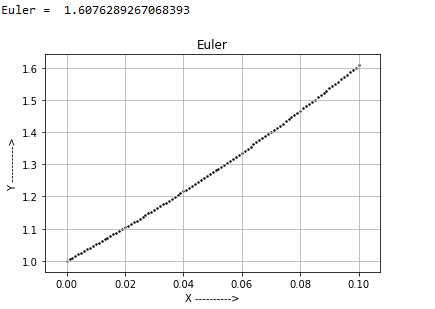
Também conhecido como o método da Reta Tangente, é o método mais antigo e mais simples. Ele consiste em aproximar a solução y(x), no sentido de uma linearização, por meio de suas tangentes. É expresso pela equação:

Consiste em calcular repetidamente a equação [2] usando o resultado atual para encontrar o próximo, obtendo, assim uma sequência de valores que aproximam o valor da solução nos pontos

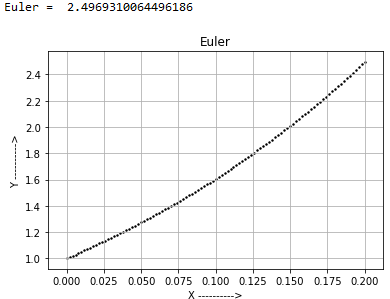
Para demonstrar o funcionamento do método temos o exemplo abaixo:

*[P1]:*

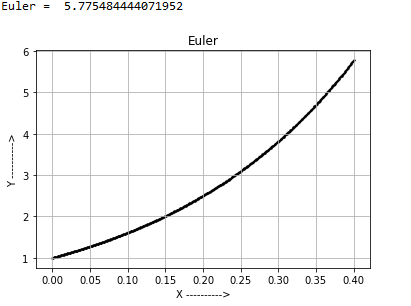
*Valor Inicial: t0 = 0, y(x0) = 1*

**

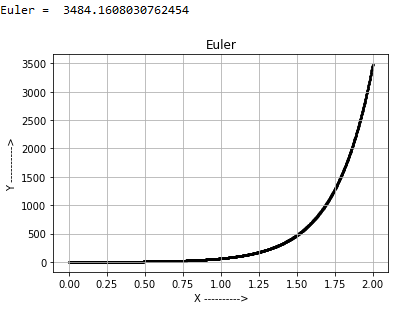
*Figura 1.1: Curva gerada pelos valores encontrados para [P1] h = 0,001, t =0,1, n= 100*

**

*Figura 1.2: Curva gerada pelos valores encontrados para [P1] h = 0,001, t =0,2, n= 200*

**

*Figura 1.3: Curva gerada pelos valores encontrados para [P1] h = 0,001, t =0,4, n= 400*

**

*Figura 1.4: Curva gerada pelos valores encontrados para [P1] h = 0,001, t =2, n= 2000*

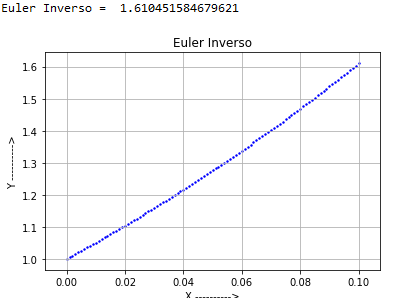
## 

## 2. Euler Inverso

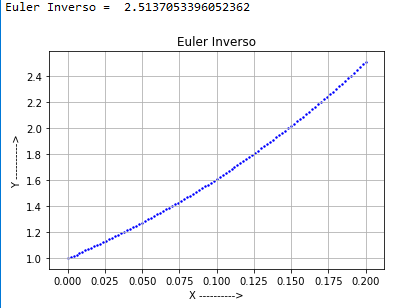
Quando aproximamos a derivada de pelo quociente de diferenças inverso ( em vez do quociente de diferenças direto), obtemos portanto a fórmula de Euler Inverso, que é uma variação da fórmula de Euler, dada por:

Nesse caso a equação [3] não fornece uma fórmula explicita de calcular y(t), portanto os cálculos podem se tornar tão complexos quanto a natureza da função f determine.

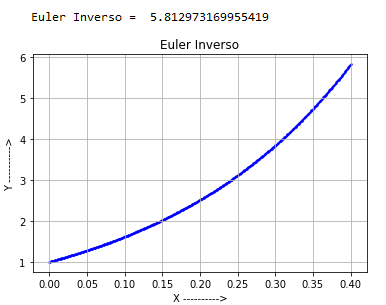
Para demonstrar o funcionamento do método temos o exemplo abaixo utilizando o mesmo problema [P1]:

**

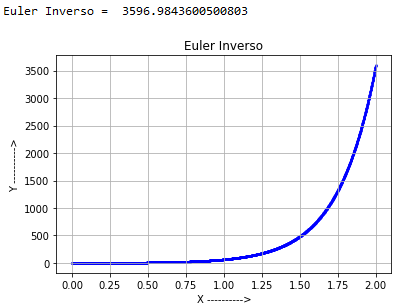
*Figura 2.1: Gráfico do problema [P1] com h = 0,001, t=0,1 aplicando o método Euler Inverso*

**

*Figura 2.2: Gráfico do problema [P1] com h = 0,001, t=0,2 aplicando o método Euler Inverso*

**

*Figura 2.3: Gráfico do problema [P1] com h = 0,001, t=0,4 aplicando o método Euler Inverso*

**

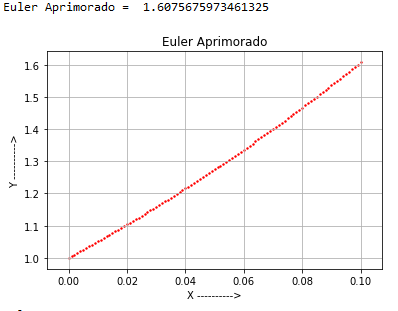
*Figura 2.4: Gráfico do problema [P1] com h = 0,001, t=2 aplicando o método Euler Inverso*

## 

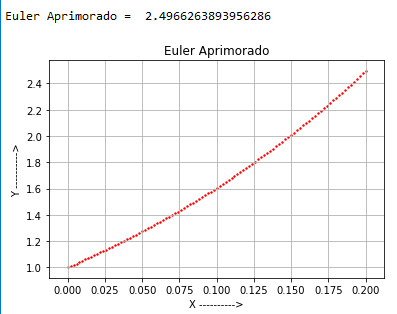
## 3. Euler Aprimorado

O método de Euler Aprimorado fornece uma fórmula explicita de encontrar *y(t)* funcionando em duas etapas: a primeira consiste em calcular e, a segunda, em utilizar o resultado para encontrar . Euler Aprimorado aproxima o integrando pela média de seus valores nas duas extremidades, ou seja, aproximar a área sob a curva pela área do trapézio sombreado e é dado pela fórmula abaixo.

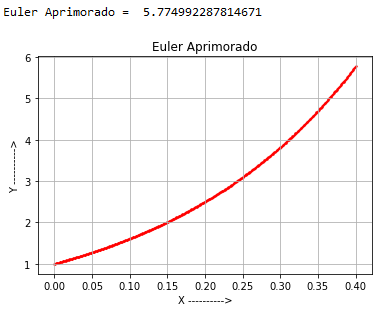
Para demonstrar o funcionamento do método temos o exemplo para o problema *[P1]:*

**

*Figura 3.1: Gráfico do problema [P1] com h = 0,001, t=0,1 aplicando o método Euler Aprimorado*

**

*Figura 2.2: Gráfico do problema [P1] com h = 0,001, t=0,2 aplicando o método Euler Aprimorado*

**

*Figura 3.3: Gráfico do problema [P1] com h = 0,001, t=0,4 aplicando o método Euler Aprimorado*

**

*Figura 3.4: Gráfico do problema [P1] com h = 0,001, t=2 aplicando o método Euler Aprimorado*

## 

## 4. Runge-Kutta de Grau 4

Este método é duas ordens de grandeza mais preciso que o método de Euler Aprimorado e três ordens de grandeza que o método de Euler. É simples de usar e suficientemente preciso para uma grande quantidade de problemas. Esse método envolve uma média ponderada de valores de f(t,y) em pontos diferentes no intervalo tn < t < tn+1 e é dada por:

onde:

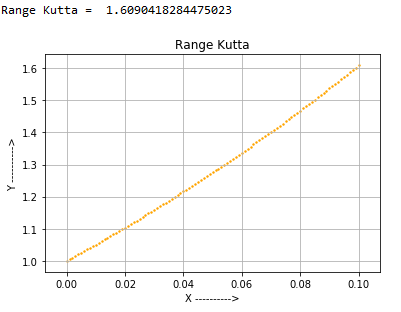
*kn1 = f(tn, yn) [6]*

*kn2 = f(tn+ h/2 , yn + hkn1/2) [7]*

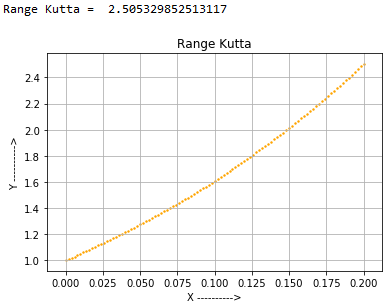
*kn3 = f(tn+ h/2 , yn + hkn2/2) [8]*

*kn4 = f(tn+ h, yn + hkn3) [9]*

Para demonstrar o funcionamento do método temos o exemplo abaixo, para o problema [*P1*]

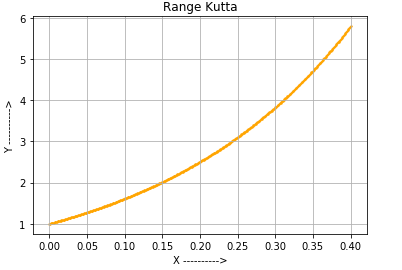
**

*Figura 4.1: Gráfico do problema [P1] com h = 0,001, t=0,1 aplicando o método Runge Kutta*

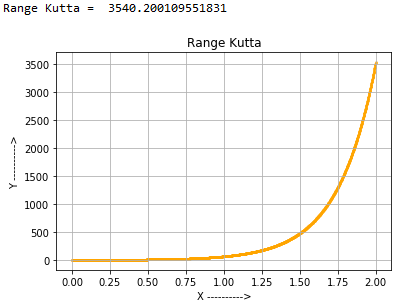
**

*Figura 4.2: Gráfico do problema [P1] com h = 0,001, t=0,2 aplicando o método Runge Kutta*

**

**

*Figura 4.3: Gráfico do problema [P1] com h = 0,001, t=0,4 aplicando o método Runge Kutta*

**

*Figura 4.4: Gráfico do problema [P1] com h = 0,001, t=2 aplicando o método Runge Kutta*

:

## 

## 5. Adams-Bashforth

A ideia básica do método de Adams é utilizar um polinômio de grau n e aproximar y'(t) por um polinômio e com este calcular a integral na equação [1]. Os coeficientes de P(t) são determinados utilizando-se os valores obtidos anteriormente de acordo com a ordem do polinômio. Neste projeto, o método de Adams-Bashforth foi implementado até a ordem quatro.

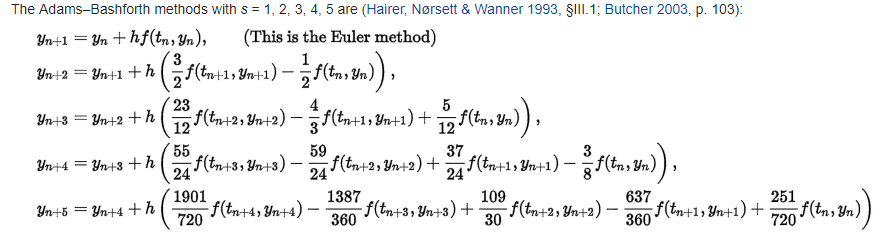
Um sistema de equações da forma abaixo é obtido:

Descobrindo o valor dos coeficientes, substituindo *y'(t)* por *P(t) = At - B* e calculando a integral em [1] achamos, após algumas simplificações algébricas, que para um passo h constante :

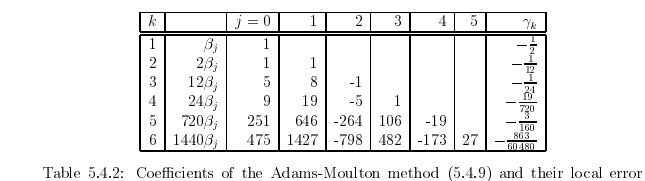
O processo para graus maiores é análogo.

Esse é um método classificado como Método de Passos Múltiplos porque há dependência de n valores calculados anteriormente, onde n depende do grau do polinômio utilizado na solução. Para se obter os primeiros valores pode-se usar qualquer um dos métodos explicados acima (Euler, Euler Inverso, Euler Aprimorado e Rung-Kutta), que são chamados de Métodos de Passo Único.

Para demonstrar o funcionamento do método temos o exemplo abaixo, para o problema [*P1*] e utilizando o Método de Runge-Kutta para obter os valores iniciais necessários. Fiz uso de 2 sites para achar os valores das constantes.

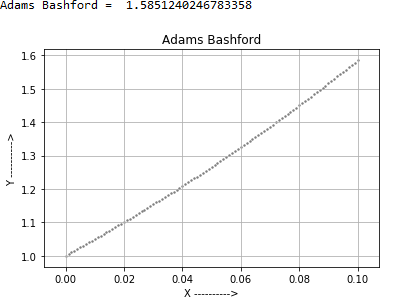


Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Linear\_multistep\_method

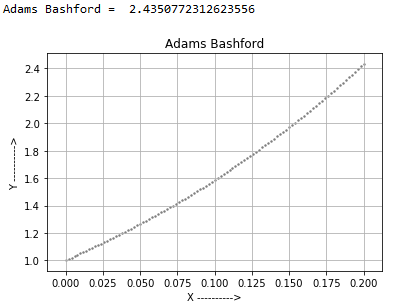
****

Fonte : http://www.cs.rpi.edu/~flaherje/pdf/ode5.pdf

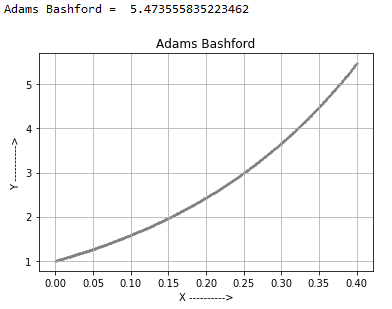
Para demonstrar o funcionamento do método temos o exemplo abaixo, para o problema [*P1*], com o grau = 5.

**

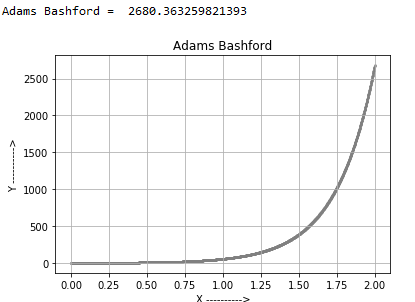
*Figura 5.1: Gráfico do problema [P1] com h = 0,001, t=0,1 aplicando o método de Adams Bashford*

**

*Figura 5.2: Gráfico do problema [P1] com h = 0,001, t=0,2 aplicando o método de Adams Bashford*

**

*Figura 5.3: Gráfico do problema [P1] com h = 0,001, t=0,4 aplicando o método de Adams Bashford*

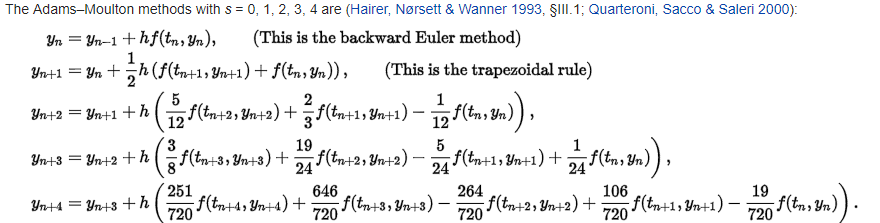
**

*Figura 5.4: Gráfico do problema [P1] com h = 0,001, t=2 aplicando o método de Adams Bashford*

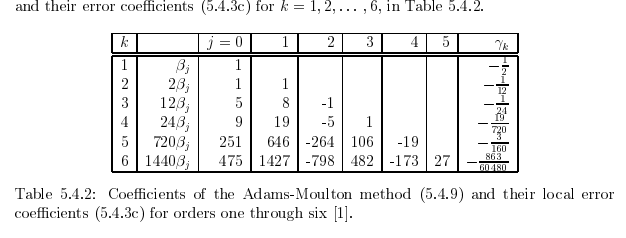
## 6. Adams-Moulton

Este método é similar ao metodo de Adams-Bashforth. Os coeficientes são escolhidos de forma a ter a maior ordem possível e os pontos utilizados para determinar os coeficientes são *(tn,yn) e (tn+1, yn+1)*, o que resulta numa forma implícita de encontrar o valor de *yn+1*. Porém para evitar usar funções mais complicadas, utilizei o método de Adams Bashford para calcular o ponto futuro, e a partir daí calculei utilizando esse valor no método de Moulton. A principal diferença são os coeficientes.

Fiz uso de 2 sites para achar os valores das constantes.

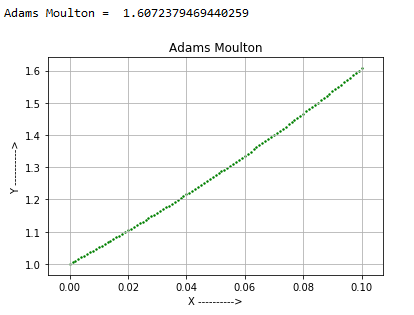


Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Linear\_multistep\_method

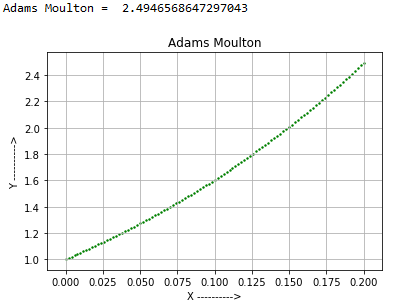
****

Fonte : http://www.cs.rpi.edu/~flaherje/pdf/ode5.pdf

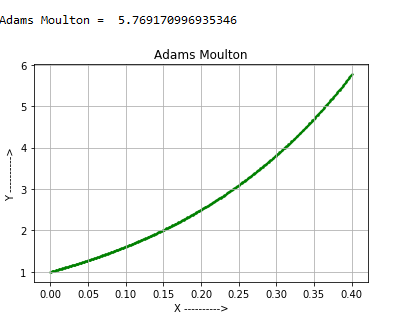
Para demonstrar o funcionamento do método temos o exemplo abaixo, para o problema [*P1*], com o grau = 5.

**

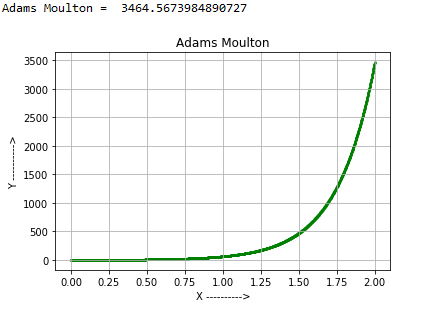
*Figura 6.1: Gráfico do problema [P1] com h = 0,001, t=0,1 aplicando o método de Adams Moulton*

**

*Figura 6.2: Gráfico do problema [P1] com h = 0,001, t=0,2 aplicando o método de Adams Moulton*

**

*Figura 6.3: Gráfico do problema [P1] com h = 0,001, t=0,4 aplicando o método de Adams Moulton*

**

*Figura 6.4: Gráfico do problema [P1] com h = 0,001, t=2 aplicando o método de Adams Moulton*